I Olimpiada Matemática Aplicada UPV

OMA UPV 2023

6 de mayo de 2023

Instrucciones.

No está permitido el uso de calculadoras ni dispositivos electrónicos de ningún tipo. Las respuestas deben indicarse en la hoja de resultados de forma clara, de lo contrario no serán evaluadas. No es necesario indicar las magnitudes en la respuesta.

Esta prueba consta de 30 preguntas a resolver en un máximo de tiempo de 2 horas y media en las que se calculará un resultado. La participación es anónima y objetiva. Los resultados deberán indicarse en la hoja de respuestas proporcionada, junto con el NIF o NIE y la fecha de nacimiento únicamente, donde no se permitirán tachones ni correcciones con típex, siendo anulada la respuesta en ese caso (se podrá solicitar otra hoja de resultados pero siempre habiendo roto previamente la anterior). Las soluciones deberán indicarse en bolígrafo de tinta azul o negra y de manera clara y legible. No se admitirán respuestas en lápiz.

Sí está permitido el uso de regla, cartabón, escuadra, compás y material de dibujo y para realizar los cálculos se facilitarán los folios necesarios. También puedes utilizar la última hoja de este examen.

Para determinar los ganadores se valorará, en primer lugar, el número de respuestas correctas (una pregunta no acertada no puntúa). En caso de empate, se premiará al participante más joven de los empatados. Se realizará una doble corrección para evitar cualquier tipo de error ya que los resultados finales serán inapelables.

Enunciados.

1. Si una pelota se lanza hacia arriba desde lo alto de un edificio de 128 metros de altura, con una velocidad de 16 m/s, entonces la altura h sobre el suelo en función del tiempo será $h(t) = 128 + 16t - 16t^2$. ¿Qué altura máxima (en metros) alcanzará la pelota?

2. Supongamos que un coche eléctrico consume batería (en kW) según la siguiente fórmula

$$C(t) = \left[20 + 2\left(\frac{v}{10} - 9\right)^2\right] t,$$

siendo v la velocidad del auto y t el tiempo en horas. Calcula cuánta energía consumiría (en kW) si fuese a un pueblo que está a 360 km a la velocidad óptima para gastar la mínima batería en 1 hora.

3. En la primera fase de un examen la media de las puntuaciones fue de 76 sobre 100. La nota media de los estudiantes que se clasificaron para la segunda fase fue 83 y la media de los no clasificados fue 55. ¿Qué porcentaje de estudiantes expresado en tanto por 1 se clasificaron para la segunda fase? Expresa el resultado en forma decimal y no como fracción.

4. Calcula N sabiendo que es el menor entero positivo que al dividirlo entre 5 da resto 2, al dividirlo por 7 da resto 3 y al dividirlo por 9 da resto 4.

5. Calcula el valor de la siguiente integral definida

$$\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin(x)\, dx,$$

expresando el resultado como fracción irreducible.

6. Sean x e y reales positivos mayores que 1. ¿Cuál es el mínimo de $\log_x(y)+\log_y(x)$?

7. En el interior de un cuadrado de lado 1 se escoge al azar un punto P. Sea $d(P)$ la distancia de P a su lado más cercano. Calcula la probabilidad de que el punto P cumpla la condición $\frac{1}{5} \leq d(P) \leq \frac{1}{3}$. Indica el resultado como fracción irreducible.

8. Hace dos años el número de estudiantes que se matricularon en mi centro era un cuadrado perfecto. El año pasado se matricularon 100 estudiantes más que el anterior y el nuevo número resultó ser un cuadrado perfecto más uno. Este año se matricularon 100 estudiantes más que el año anterior y de nuevo el número de estudiantes es un cuadrado perfecto. ¿Cuántos estudiantes se matricularon este año?

9. Tenemos un cuadrilátero con los cuatro lados diferentes y diagonales perpendiculares que miden 5 y 8. ¿Cuánto vale su área?

10. El 20% de la humanidad dispone del 80% de la riqueza. Cuántas veces es más rica una persona de este 20% que otra del resto de la humanidad.

11. Si a, b y c son enteros positivos con

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104$$

¿Cuánto vale $a^2 + b^2 + c^2$?

12. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ dos reales distintos. Halla el valor numérico de $x^2 + y^2$ sabiendo que

$$\begin{aligned} x^2 &= 8x + y \\ y^2 &= 8y + x \end{aligned}$$

13. En una reunión de 500 diplomáticos sabemos que 450 de ellos hablan inglés, 380 hablan francés, 390 hablan español y 290 hablan alemán. ¿Cuál es el mínimo número de diplomáticos que podemos asegurar que hablan los cuatro idiomas?

14. Si a y b son las raíces de $x^2 - 2x - 143 = 0$, halla el valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Indica el resultado como fracción irreducible.

15. Si $a^2 + b^2 = 3ab$ con $a, b \neq 0$ reales, calcula $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^6$.

16. Las reservas de petróleo de Alaska durarían 35 años si solo las consumiera EE. UU. Si también las consumiera China, durarían solamente 10 años. ¿Cuántos años durarían si solo las consumiera China?

17. Si AB y BC son dos aristas consecutivas de un polígono regular y $\angle BAC = 15°$, ¿cuántos lados tiene el polígono?

18. El rombicosidodecaedro es un poliedro arquimediano que tiene 62 caras que son 30 cuadrados, 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros. Determina el número de vértices.

19. Sean a, b, c, d, f y g naturales tales que $b \cdot f = 91$, $a \cdot d = 18$, $c \cdot d = 16$ y $b \cdot g = 39$. Si $L = a + b + c$ y $H = d + c = f + g$, calcula el producto $L \cdot H$.

20. Una sandía pesaba 10 kg. Se sabe que el 99% de ellos era agua. Después de cierto tiempo al Sol, se evaporó parte del agua, siendo ahora el porcentaje de esta del 98%. ¿Cuánto pesa ahora la sandía (en kg)?

21. En un triángulo $\triangle ABC$ se verifica $\cos(2A - B) + \sin(A + B) = 2$. Si AB mide 4, calcula el perímetro del triángulo $\triangle ABC$. Indica el resultado en su expresión exacta.

22. Simplifica al máximo el valor de la expresión $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$.

23. Halla el único número natural a que es solución de la ecuación

$$\frac{1}{\log_2(a)} + \frac{1}{\log_3(a)} + \frac{1}{\log_4(a)} = 1.$$

24. Calcula la suma $a + b + c + d + f$ siendo a, b, c, d, f los números enteros más pequeños que resultan de realizar el siguiente ajuste estequiométrico

$$aAg + bHNO_3 \rightarrow cNO + dH_2O + fAgNO_3$$

25. Para formar un equipo de pádel se necesitan 4 jugadores y un entrenador, que se deben elegir de entre un grupo de 10 jugadores y 3 entrenadores. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar?

26. La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es: $C(x) = \dfrac{x^3}{100} + 8x + 20$. Se define la función coste medio por unidad como $Q(x) := \dfrac{C(x)}{x}$. ¿Cuántas unidades son necesarias producir para que sea mínimo el coste medio por unidad?

27. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+5}\right)^{3x+4}.$$

28. Un depósito de 10 litros de capacidad contiene un gas a una presión de 5 atm y a una temperatura de 27 $°C$ y se conecta a través de una válvula con otro depósito de 20 litros que contiene el mismo gas a la misma temperatura y a 2,5 atm. ¿Cuál será la presión en atm cuando se abra la llave que conecta ambos depósitos? Indica el resultado como fracción irreducible.
Nota 1: $R = 0,082\ \frac{atm\cdot L}{mol\cdot K}$.
Nota 2: $K = °C + 273$.
Nota 3: $PV = nRT$.

29. En un triángulo rectángulo trazamos la altura que parte del ángulo recto para dividirlo en dos triángulos, uno de los cuales tiene el triple de área que el otro. Si la hipotenusa del triángulo original mide 1, ¿cuánto vale el cuadrado de su área? Indica el resultado como fracción irreducible.

30. Una persona compra doce piezas de fruta entre peras y melocotones por 99 céntimos en total. Si una pera cuesta 3 céntimos más que un melocotón y compra más peras que melocotones, ¿cuántas peras compra en total?
Nota: El precio de una pieza de fruta es un número entero positivo de céntimos.

Utiliza esta hoja para realizar cálculos.

Hoja de resultados OMA UPV 2023

NIF o NIE (con letra): ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

Fecha de nacimiento: ___ ___ / ___ ___ / ___ ___ ___ ___

Problema	Resultado	Problema	Resultado	Problema	Resultado
1	132	11	56	21	$6+2\sqrt{3}$
2	80	12	63	22	-4
3	0.75	13	10	23	24
4	157	14	$\frac{-2}{143}$	24	13
5	$\frac{4}{3}$	15	125	25	630
6	2	16	14	26	10
7	$\frac{56}{225}$	17	12	27	e^{-18}
8	2601	18	60	28	$\frac{10}{3}$
9	20	19	300	29	$\frac{3}{64}$
10	16	20	5	30	9

Corrección 1: ________ **Corrección 2:** ________